TOPICS FROM THE GAUSSIAN WORLD, PARTE II

PROCESSI GAUSSIANI IN $\mathbb{R}^d$

I. MOTO BROWNIANO

[MÖRTERS - PERES]

1. MOTO BROWNIANO COME PROCESSO GAUSSIANO

DEFINIZIONE

UN PROCESSO REALE $B = (B_t)_{t \geq 0}$ SI DICE MOTO BROWNIANO (M.B.) SE

a) È UN PROCESSO GAUSSIANO CENTRATO ($E[B_t] \equiv 0$) E

$$\mathrm{Cov}[B_s, B_t] = s \wedge t = \min\{s,t\}$$

b) LE TRAIETTORIE $t \mapsto B_t(\omega)$ SONO CONTINUE, PER Q.O. $\omega \in \Omega$.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ SP. PROBAB. $\qquad B_t : \Omega \to \mathbb{R}$ V.A.

a') $\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall\, 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$: $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \sim N(0, K)$

$$K_{ij} = t_i \wedge t_j$$

ESERCIZIO

UN PROCESSO REALE $B = (B_t)_{t \geq 0}$ SODDISFA a) $\iff$ a') $\iff$ a'') $\iff$ a''')

a'') $\begin{cases} \bullet\ B_0 = 0 \text{ Q.C.} \\ \bullet\ \text{INCREMENTI INDIPENDENTI: } \forall k \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 = t_0 \leq t_1 < \dots < t_k \end{cases}$

- $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})_{i=1,\dots,k}$ SONO V.A. INDIP.
- INCREMENTI STAZIONARI GAUSSIANI: $\forall\, 0 \le s < t$, $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$

a''')
- $B_0 = 0$ Q.C.
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\forall\, 0 < t_1 < \dots < t_k$, IL VETTORE $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$ HA DENSITÀ

$$f_{(B_{t_1},\dots,B_{t_k})}(x_1,\dots,x_k) = C \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \Big(\underbrace{\frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}}}_{\frac{\Delta \text{ SPAZIO}}{\sqrt{\Delta \text{ TEMPO}}}} \Big)^2 \right\}$$

CON $t_0 = 0$, $x_0 = 0$.

$$C = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \sqrt{t_1 (t_2 - t_1) \cdots (t_k - t_{k-1})}}$$

- SCALING DIFFUSIVO $\quad \Delta \text{ SPAZIO} \approx \sqrt{\Delta \text{ TEMPO}}$

$$\begin{cases} B_t - B_s \overset{d}{=} \sqrt{t-s}\, Z \\ Z \sim N(0,1) \end{cases}$$

$$|B_t - B_s| = |Z| \sqrt{t-s}$$

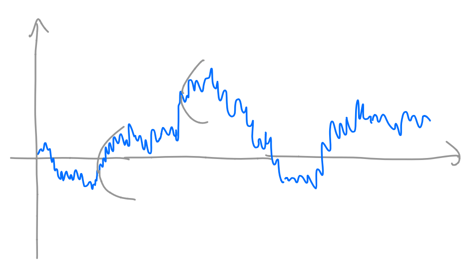
$$P(0.2 \le |Z| \le 2) \simeq 80\%$$
$$P(0.1 \le |Z| \le 3) \simeq 92\%$$

TEOREMA

PER Q.O. $\omega \in \Omega$, LE TRAIETTORIE $t \mapsto B_t(\omega)$ NON SONO DERIVABILI IN NESSUN PUNTO E HANNO VARIAZIONE (PRIMA) INFINITA IN OGNI INTERVALLO (a,b):

$$\sup_{\pi} \sum_{i=1}^{k} |B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)| = \infty$$

$$\pi = \{ a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b \}$$



2. COSTRUZIONE ("ESPLICITA") DEL M.B.

CONCENTRIAMOCI SU VETTORI GAUSSIANI IN $\mathbb{R}^d$

SIA $K \in \mathbb{R}^{d\times d}$ MATRICE SIMM., SEMI-DEF. POS., NON SINGOLARE $(\det K \neq 0)$

ALLORA $X \sim N(0,K)$ HA DENSITÀ $f_X(\overbrace{x_1,\dots,x_d}^{x}) = c \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle x, K^{-1}x\rangle\right\}$

$$= c \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(x,x)\right\}$$

PRODOTTO SCALARE $(x,y) := \langle x, K^{-1}y\rangle$

PROPOSIZIONE

SIA $v^{(1)},\dots,v^{(d)}$ BASE DI $\mathbb{R}^d$ ORTONORMALE PER $(\cdot,\cdot) = \langle \cdot, K^{-1}\cdot\rangle$

SIANO $Z_1,\dots,Z_d$ V.A. IID $N(0,1)$. ALLORA

$$X := \sum_{i=1}^{d} Z_j v^{(j)} \sim N(0,K)$$

COSTRUZIONE "ESPLICITA" DI X

DIM. SIA $\vartheta \in \mathbb{R}^d$. MOSTRIAMO CHE $E\left[e^{i\langle\vartheta,X\rangle}\right] = e^{-\frac{1}{2}\langle\vartheta,K\vartheta\rangle}$

$$E\left[e^{i\langle\vartheta,X\rangle}\right] = E\left[\prod_{j=1}^{d} e^{i\langle\vartheta,v^{(j)}\rangle Z_j}\right] = \prod_{j=1}^{d} e^{-\frac{1}{2}\langle\vartheta,v^{(j)}\rangle^2} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\langle\vartheta,v^{(j)}\rangle^2}$$

$$\langle\vartheta,v^{(j)}\rangle = \langle v^{(j)}, K^{-1}K\vartheta\rangle = (v^{(j)},K\vartheta)$$

$$\sum_{j=1}^{d}\langle\vartheta,v^{(j)}\rangle^2 = \sum_{j=1}^{d}(v^{(j)},K\vartheta)^2 = (K\vartheta,K\vartheta) = \langle K\vartheta, K^{-1}K\vartheta\rangle$$

$$= \langle K\vartheta,\vartheta\rangle$$

$\blacksquare$

- LO SPAZIO DI HILBERT $(\mathbb{R}^d, (\cdot,\cdot) = \langle \cdot, K^{-1}\cdot \rangle)$ È DETTO SPAZIO DI CAMERON-MARTIN DELLA PROBAB. $N(0,K)$.

- SIA ORA K SINGOLARE ($\det(K)=0$), ALLORA $\ker(K) \neq \{0\}$. DEFINIAMO

$$H := \operatorname{Im}(K) \subsetneq \mathbb{R}^d$$

DATI $x, y \in H$, $\exists\ \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^d$ T.C. $x = K\hat{x}$, $y = K\hat{y}$

DEFINIAMO UN PRODOTTO SCALARE SU H PONENDO

$$(x,y) := \langle \hat{x}, K\hat{y} \rangle = \langle K\hat{x}, y \rangle$$

LA DEFINIZIONE È BEN POSTA, OSSIA NON DIPENDE DALLA SCELTA DI $\hat{x}$ E $\hat{y}$.

LO SPAZIO DI HILBERT $(H, (\cdot,\cdot))$ È DETTO SPAZIO DI CAMERON-MARTIN

OSSERVIAMO CHE $h := \dim(H) \le d$. ESCLUDIAMO $h = 0$.

<u>PROPOSIZIONE</u>

SIA $v^{(1)}, \dots, v^{(h)}$ BASE ORTONORMALE DI $(H, (\cdot,\cdot))$

SIANO $Z_1, \dots, Z_h$ V.A. IID $N(0,1)$. ALLORA

$$X := \sum_{j=1}^{h} Z_j\, v^{(j)} \sim N(0,K).$$

COSTRUZIONE "ESPLICITA"

TORNIAMO AL MOTO BROWNIANO (IN MODO EURISTICO) $0 < t_1 < \dots < t_k \leq 1$

$$f_{(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})}(x_1, \dots, x_k) = C \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \right)^2 \right\}$$

$$= C \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)^2 (t_i - t_{i-1}) \right\}$$

$$\approx C \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 (x'(t))^2 \, dt \right\} \; ?$$

$$= C \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} (x, x)_{H_0^1} \right\}$$

$$H_0^1 := \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \; : \; \exists \, h \in L^2([0,1]) \text{ T.C. } f(t) = \int_0^t h(s) \, ds \right\}$$

$\Rightarrow f(0) = 0.$

SE $f \in H_0^1$ PONIAMO $f' := h$

PER $f, g \in H_0^1$ DEF. $(f, g)_{H_0^1} := \langle f', g' \rangle_{L^2} = \int_0^1 f'(s) \, g'(s) \, ds$

FATTO

$\left(H_0^1, (\cdot, \cdot)_{H_0^1} \right)$ È UNO SPAZIO DI HILBERT

DOMANDA: H_0^1 È LO SPAZIO DI CAMERON-MARTIN DEL M.B. ??? SÌ:

TEOREMA

SIA $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ BASE ORTONORMALE DI H_0^1. (SET ORTONORMALE COMPLETO)

SIANO $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ V.A. IID $N(0,1)$. ALLORA

$$B_t := \sum_{n \in \mathbb{N}} Z_n f_n(t) \text{ È UN M.B.}$$

COSTRUZIONE "ESPLICITA"

OSS. SI HA $\sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n^2 = \infty$ Q.C. $\Rightarrow$ LA SERIE NON CONVERGE IN H_0^1.

OSS: SE $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ BASE ORTONORMALE DI $L^2([0,1])$, ALLORA

$$\left(f_n(t) := \int_0^t h_n(s)\,ds\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ É BASE ORTONORMALE DI } H_0^1.$$

DIM. (SKETCH)

$$B_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) f_n(t) = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} Z_n(\omega) f_n(t)}_{B_t^{(N)}(\omega)}$$

1) $\forall N\in\mathbb{N}$, $\forall \omega\in\Omega$, $t \mapsto B_t^{(N)}(\omega)$ É CONTINUA.

2) PER Q.O. $\omega\in\Omega$, $\left(B_t^{(N)}(\omega)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ É DI CAUCHY IN $\left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$

$C[0,1] := \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ CONTINUE} \}$, $\|f\|_\infty := \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

DIMOSTRARE 2) NON É FACILE! SE SI VUOL FARLO "CON LE MANI", TUTTO DIPENDE DALLA BASE $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ DI H_0^1, O EQUIV. DA $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ DI L^2:

- $\{f_n'(s)\} = \{\sqrt{2}\cos(nx)\}_{n=0,1,\dots}$ DIFFICILE! (WIENER)
- $\{f_n'(s)\} = \left\{ c\left(\mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n})}(s) - \mathbb{1}_{[\frac{k+1}{2^n},\frac{k+2}{2^n})}(s)\right)\right\}_{\substack{n=0,1,2,\dots \\ k=0,\dots,2^n-1}}$ FACILE! (LÉVY)

CON TECNICHE PIÚ AVANZATE SI DIMOSTRA CHE 2) VALE $\forall (f_n)$ BASE DI H_0^1.

ASSUMIAMO DI AVERE DIMOSTRATO 2) - POSSO DEFINIRE

$$B_t(\omega) := \lim_{N\to\infty} B_t^{(N)}(\omega) \qquad \text{PER Q.O. } \omega \in \Omega .$$

MOSTRIAMO CHE $B = (B_t)_{t\in[0,1]}$ È M.B., OSSIA

a) B È PROCESSO GAUSSIANO CENTRATO ($E[B_t]=0$) CON

$$\mathrm{Cov}[B_s, B_t] = s\wedge t$$

$B_t = \lim_{N\to\infty} B_t^{(N)}$ Q.C., INOLTRE $B^{(N)} = (B_t^{(N)})_{t\in[0,1]}$ È PROCESSO GAUSSIANO, $\forall N \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ B È PROCESSO GAUSSIANO E $E[B_t] = \lim_{N\to\infty} E[B_t^{(N)}] = 0$

$$\mathrm{Cov}[B_s, B_t] = \lim_{N\to\infty} \mathrm{Cov}[B_s^{(N)}, B_t^{(N)}]$$

$$\mathrm{Cov}[B_s^{(N)}, B_t^{(N)}] = \mathrm{Cov}\Big[\sum_{n=1}^N Z_n f_n(s), \sum_{m=1}^N Z_m f_m(t)\Big]$$

$$= \sum_{n=1}^N f_n(s) f_n(t) = \sum_{n=1}^N \underbrace{\langle f_n', \mathbb{1}_{[0,s]}\rangle_{L^2}}_{\int_0^1 f_n'(x)\mathbb{1}_{[0,s]}(x)\,dx = \int_0^s f_n'(x)\,dx = f_n(s)} \langle f_n', \mathbb{1}_{[0,t]}\rangle_{L^2}$$

PARSEVAL $\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \mathrm{Cov}[B_s^{(N)}, B_t^{(N)}] = \sum_{n=1}^\infty \langle f_n', \mathbb{1}_{[0,s]}\rangle_{L^2} \langle f_n', \mathbb{1}_{[0,t]}\rangle$

$$= \langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]}\rangle_{L^2} = s\wedge t$$

$\blacksquare$

3. M.B. COME PROCESSO DI MARKOV

DEFINIZIONE

UN NUCLEO DI TRANSIZIONE (O DI PROB.) SU $\mathbb{R}^d$ È UNA FUNZIONE

$$q : \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0,1] \qquad \text{T.C.}$$
$$(x, A) \longmapsto q(x,A)$$

1) $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $A \mapsto q(x,A)$ È UNA PROBAB. SU $\mathbb{R}^d$

2) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $x \mapsto q(x,A)$ È MISURABILE

DEFINIZIONE

UN SEMIGRUPPO DI TRANSIZIONE (O DI MARKOV) SU $\mathbb{R}^d$ È UNA FAMIGLIA $(p_t(x,A))_{t \geq 0}$ DI NUCLEI DI TRANSIZ. T.C. $\forall s,t \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$p_{t+s}(x,A) = \int_{\mathbb{R}^d} p_t(x,dy)\, p_s(y,A)$$

CHAPMAN-KOLMOGOROV.

DEFINIZIONE

$\forall s<t: \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$

SIA $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ SP. PROB. MUNITO DI FILTRAZIONE $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ - UN PROCESSO $X = (X_t)_{t \geq 0}$ DEF. SU Ω A VALORI IN $\mathbb{R}^d$ SI DICE DI MARKOV (RISP. A $\mathbb{F}$) SE $\exists$ SEMIGRUPPO DI TRANSIZ. p T.C.

1) X È ADATTATO A $\mathbb{F}$: X_t È $\mathcal{F}_t$-MIS. $\forall t \geq 0$

2) $\forall 0 \leq s < t$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$: $P(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = p_{t-s}(X_s, A)$ Q.C.

PROPRIETÀ DI MARKOV

$\iff \forall C \in \mathcal{F}_s : \quad P(X_t \in A, C) = E[p_{t-s}(X_s, A) \mathbb{1}_C]$ (9)

IDEA: $P(X_t \in A \mid C, X_s = x) = p_{t-s}(x, A) \quad (\forall C \in \mathcal{F}_s.)$

DEFINIZIONE

UN PROCESSO $B = (B_t = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)}))_{t \geq 0}$ A VALORI IN $\mathbb{R}^d$ SI DICE MOTO BROWNIANO IN $\mathbb{R}^d$ $\iff$ LE COMPONENTI $B^{(i)} = (B_t^{(i)})_{t \geq 0}$ PER $i = 1, \dots, d$ SONO M.B. REALI INDIPENDENTI

PROPOSIZIONE

IL M.B. IN $\mathbb{R}^d$ È UN PROCESSO DI MARKOV RISP. A $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_t = \sigma(B_u : u \in [0,t])\}_{t \geq 0}$ (FILTRAZ. NATURALE DI B) CON NUCLEO DI TRANSIZIONE $p_t(x, \cdot) = N(x, t I_d)$. OSSIA

$$p_t(x, dy) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d t^d}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{|x-y|^2}{t}\right\}} \, dy$$
$$= g_t(y-x) \, dy$$

p_t: NUCLEO DEL CALORE; dy: LEBESGUE

DIM. ESERCIZIO. PUNTO CHIAVE: INDIP. + STAZ. DEGLI INCREMENTI $\Rightarrow$

$\forall s \geq 0 : \quad \hat{B} := (B_{s+u} - B_s)_{u \geq 0}$ È M.B. INDIP. DA $\mathcal{F}_s$. "PROPRIETÀ DI MARKOV DEL M.B."

$\boxtimes$

D'ORA IN AVANTI CI CONCENTRIAMO SUL MB IN $\mathbb{R}$.

PROPOSIZIONE

SIA $B = (B_t)_{t\geq 0}$ M.B. IN $\mathbb{R}$. IL PROCESSO $X = (X_t := |B_t|)_{t\geq 0}$ È DI MARKOV (RISP. ALLA FILTRAZ. NAT. DI B) CON NUCLEO DI TRANSIZ.

$$q_t(x,\cdot) = \begin{cases} \text{LEGGE DI } |x+Y| \text{ CON } Y \sim N(0,t) & \text{SE } x \geq 0 \\ \text{ARBITRARIO} & \text{SE } x < 0 \end{cases}$$

CIOÈ $q_t(x, dy) = \{ g_t(y-x) + g_t(-y-x) \} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\, dy \quad \forall x \geq 0.$

DIM. ESERCIZIO $\blacksquare$

ATTENZIONE! IN GENERALE, SE $B = (B_t)_{t\geq 0}$ È UN PROC. DI MARKOV, NON È DETTO CHE $X = (X_t = \varphi(B_t))_{t\geq 0}$ SIA DI MARKOV, PER UNA GENERICA $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE

SI DICE MOTO BROWNIANO RIFLESSO UN PROC. $X = (X_t)_{t\geq 0}$ A VALORI IN $[0,\infty)$ T.C.

1) X È DI MARKOV CON NUCLEO DI TRANSIZ. q (COME $|B|$)

2) $t \mapsto X_t$ CONTINUE Q.C.

CONCLUDIAMO CONSIDERANDO IL MASSIMO M DEL MOTO BROWNIANO B:

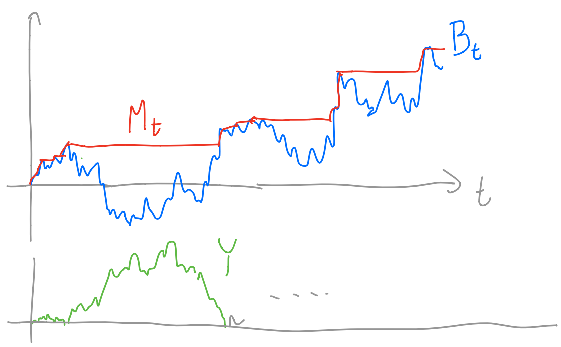
$$M_t := \max_{s \in [0,t]} B_s$$

[ASSUMIAMO CHE $t \mapsto B_t(\omega)$ SIA CONTINUA $\forall \omega \in \Omega$]

IL "PRINCIPIO DI RIFLESSIONE" AFFERMA CHE, $\forall t \geq 0$ FISSATO, $M_t \overset{d}{=} |B_t|$.

TEOREMA (LÉVY 1948)

IL PROCESSO $Y := M - B = (Y_t := M_t - B_t)_{t \geq 0}$ È UN M.B. RIFLESSO (RISP. ALLA FILTRAZ. NATURALE DEL M.B. B).



DIM. $Y_0 = 0$, $t \mapsto Y_t$ È CONTINUA. ; DOBBIAMO MOSTRARE CHE

Y È DI MARKOV CON NUCLEO DI TRANS. q

FISSO $0 \leq s < t$, DEFINIAMO

$$\begin{cases} \hat{B}_{s,t} := B_t - B_s \\ \hat{M}_{s,t} := \max\limits_{u \in [s,t]} \hat{B}_{s,u} = \max\limits_{u \in [s,t]} (B_u - B_s) = \left(\max\limits_{u \in [s,t]} B_u \right) - B_s \end{cases}$$

ALLORA $M_t = M_s \vee (B_s + \hat{M}_{s,t})$ INOLTRE $B_t = B_s + \hat{B}_{s,t}$

$$\Rightarrow \quad Y_t = M_t - B_t = M_s \vee (B_s + \hat{M}_{s,t}) - B_s - \hat{B}_{s,t} \overset{!}{=} \underbrace{(M_s - B_s)}_{Y_s} \vee \hat{M}_{s,t} - \hat{B}_{s,t}$$

$[a \vee c - b = (a-b) \vee (c-b)]$

IN DEFINITIVA $\quad Y_t = Y_s \vee \hat{M}_{s,t} - \hat{B}_{s,t}$

$$Y_t = f(\underbrace{Y_s}_{\mathcal{F}_s\text{-MIS.}}, \underbrace{\hat{M}_{s,t}, \hat{B}_{s,t}}_{\text{INDIPENDENTI DA } \mathcal{F}_s})$$

IL "LEMMA DEL CONGELAMENTO"

$$P(Y_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = P(f(Y_s, \hat{M}_{s,t}, \hat{B}_{s,t}) \in A \mid \mathcal{F}_s) \overset{!}{=} \underbrace{P(f(y, \hat{M}_{s,t}, \hat{B}_{s,t}) \in A)}_{q_{t-s}(y,A)} \Big|_{y = Y_s}$$

DUNQUE Y È DI MARKOV CON NUCLEO DI TRANSIZ.

$$q_{t-s}(y, A) = P(y \vee \hat{M}_{s,t} - \hat{B}_{s,t} \in A)$$

CI RESTA DA MOSTRARE CHE

$$\forall\, y \geq 0: \quad y \vee \hat{M}_{s,t} - \hat{B}_{s,t} \overset{d}{=} |y + \underbrace{\hat{B}_{s,t}}_{}|$$

Y CON $Y \sim N(0, t-s)$

$$\Leftrightarrow \quad \forall a \geq 0: \quad \underbrace{P(y \vee \hat{M}_{s,t} - \hat{B}_{s,t} > a)}_{} = P(|y + \hat{B}_{s,t}| > a)$$

$$= P\left((y - \hat{B}_{s,t}) \vee (\hat{M}_{s,t} - \hat{B}_{s,t}) > a\right)$$

$$= p_1 + p_2$$

$$= P(y + \hat{B}_{s,t} > a) + P(y + \hat{B}_{s,t} < -a)$$

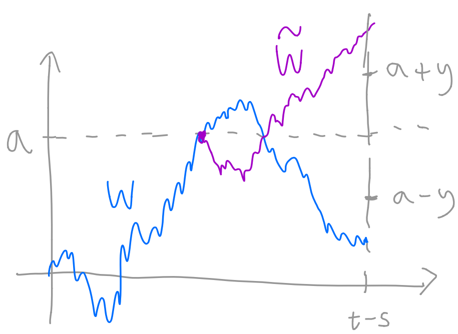
$$p_1 = P(y - \hat{B}_{s,t} > a)$$

$$p_2 = P(y - \hat{B}_{s,t} \leq a, \ \hat{M}_{s,t} - \hat{B}_{s,t} > a)$$

DEF. $\quad W = (W_u := B_{t-u} - B_u)_{u \in [0,t]}$ $\quad$ (t FISSATO!)

È M.B. $\quad M^W_r := \max\limits_{u \in [0,r]} W_u$

$$p_2 = P(M^W_{t-s} > a, \ \underline{W_{t-s} \leq a - y}) \qquad \text{(ESERCIZIO)}$$



$$p_2 = P(\tilde{W}_{t-s} \geq a + y)$$

$$= P(y + \hat{B}_{s,t} \leq -a)$$